

بسم الله الرحمن الرحيم

کلاس نکته و تست
نظریه زبان ها و ماشین ها

ابوالفضل گیلک

جلسه بیست و چهارم – فصل دهم

تصمیم ناپذیری و کاهش پذیری

حل تست های 15 سال اخیر

ارشد – دکتری

مهندسی کامپیوتر – علوم کامپیوتر

تست های فصل 10

تصمیم‌ناپذیری و کاهش‌پذیری

تست 1 الی 31

(همه سوالات فصل 10)

- 1- کدام مورد، درست است؟ (مهندسی کامپیوتر - 1403)
- 1) زبان‌های شمارش‌پذیر بازگشتی، نسبت به عمل مکمل بسته‌اند.
 - 2) تعداد ماشین‌های تورینگ غیرهم‌ارز، برابر با تعداد زبان‌هاست.
 - 3) تمام زبان‌های پذیرفته شده توسط ماشین تورینگ، شمارش‌پذیر بازگشتی هستند.
 - 4) به ازای تمام زبان‌هایی که ماشین تورینگ پذیرنده دارند، می‌توان الگوریتم عضویت پیشنهاد داد.
- 2- کدام یک از مسائل زیر تصمیم‌ناپذیر است؟ (مهندسی کامپیوتر - 99)
- 1) این که تعیین کنیم آیا یک گرامر مستقل از متن مبهم است یا خیر.
 - 2) این که تعیین کنیم آیا زبان یک گرامر مستقل از متن متناهی است یا خیر.
 - 3) این که تعیین کنیم آیا زبان یک گرامر مستقل از متن تهی است یا خیر.
 - 4) این که تعیین کنیم آیا یک رشته به وسیله یک گرامر مستقل از متن پذیرفته می‌شود یا خیر.
- 3- با توجه به تعریف گزاره‌های P و Q، کدام مورد درست است؟ (مهندسی کامپیوتر - 97)
- P به ازای هر گرامر مستقل از متن، الگوریتمی وجود دارد که بتوان گفت آیا زبان تولید شده به وسیله آن گرامر نامتناهی است یا خیر.
- Q به ازای هر دو گرامر مستقل از متن، الگوریتمی وجود دارد که بتوان گفت آیا آن دو گرامر زبان مشترکی تولید می‌کنند یا خیر.
- 1) P درست، Q درست 2) P نادرست، Q نادرست 3) P درست، Q نادرست 4) P نادرست، Q درست
- 4- یک ماشین تورینگ یک نواره قطعی را یک خودکاره با محدودیت خطی می‌گوییم اگر به ازای هر رشته ورودی w، اجرای ماشین حداکثر همان محدوده‌ای از نوار را به وسیله w اشغال شده بود مورد استفاده قرار دهد. فرض کنید زبان این ماشین L و طول ورودی آن $|w| = n$ باشد. آنگاه این مسأله که آیا w متعلق به زبان L است یا خیر؟ (مهندسی کامپیوتر - 96)
- 1) در بدترین حالت دارای پیچیدگی زمانی چند جمله‌ای نمی‌باشد.
 - 2) برای این مسأله در حالت کلی اصلاً الگوریتمی وجود ندارد.
 - 3) در بدترین حالت دارای پیچیدگی زمانی $O(n^3)$ است.
 - 4) در بدترین حالت دارای پیچیدگی زمانی $O(n)$ است.
- 5- اگر N یک مدل محاسباتی دلخواه و $\langle \cdot \rangle$ نمایش کدینگ ماشین‌های از نوع N باشد، تعریف می‌کنیم:
- $$L_n \triangleq \{ \langle M \rangle \mid M \text{ ماشینی از نوع } N \text{ است که هیچ کلمه‌ای به طول فرد را نمی‌پذیرد} \}$$
- در این صورت کدام گزینه صحیح است؟ (علوم کامپیوتر - 95)
- 1) برای هر مدل محاسباتی N، زبان L_N تصمیم‌پذیر است.
 - 2) اگر N مدل تورینگ قطعی باشد، آنگاه L_N تصمیم‌پذیر (decidable) است.
 - 3) اگر N مدل PDA (آتوماتون پشته‌ای) باشد، آنگاه L_N تصمیم‌پذیر (decidable) است.
 - 4) فقط وقتی N مدل FA (آتوماتون متناهی) باشد، L_N تصمیم‌پذیر (decidable) است.

6- یک گرامر مستقل از متن است، کدام عبارت نادرست است؟ (علوم کامپیوتر - 94)

- 1) الگوریتمی وجود دارد که می‌گوید آیا $\overline{L(G)}$ (مکمل زبان گرامر G) تهی هست یا خیر.
- 2) الگوریتمی وجود دارد که می‌گوید آیا $(L(G))^R$ (معکوس زبان گرامر G) متناهی هست یا خیر.
- 3) الگوریتمی وجود دارد که می‌گوید آیا $L(G)$ متناهی هست یا خیر.
- 4) الگوریتمی وجود دارد که می‌گوید آیا $(L(G))^*$ تهی است یا خیر.

7- در مورد بررسی عضویت $x \neq \lambda$ در زبان مربوط به یک گرامر مستقل از متن G به شکل نرمال چامسکی، کدام گزینه صحیح است؟ (علوم کامپیوتر - 94)

- 1) مسأله تعیین عضویت x در $L(G)$ در صورت نامبهم بودن G لزوماً در زمان چند جمله‌ای نسبت به طول x قابل حل نیست.
- 2) اگر $x \in L(G)$ آن‌گاه با حداکثر $2|x|-1$ قاعده می‌توان x را تولید کرد.
- 3) مسأله تعیین عضویت x در $L(G)$ در حالت کلی تصمیم‌پذیر نیست.
- 4) اگر $x \in L(G)$ آن‌گاه در هر گرامر مستقل از متن برای $L(G)$ می‌توان با حداکثر $2|x|-1$ قاعده x را تولید کرد.

8- یک گراف با n رأس را به صورت زیر با الفبای $\{0,1,\#\}$ کد می‌کنیم که رشته:

$$X_1^1 X_2^1 \dots X_n^1 \# X_1^2 X_2^2 \dots X_n^2 \# \dots \# X_1^n X_2^n \dots X_n^n$$

$(X_i^j \in \{0,1\})$ نمایش گرافی با n رأس به شماره‌های $1,2,\dots,n$ است که $X_j^i = 1$ است اگر و تنها اگر بین رأس‌های i ام و j ام

یال وجود داشته باشد. کدام گزاره در مورد زیر مجموعه‌های گراف‌ها با کدگذاری بالا درست است؟ (علوم کامپیوتر - 92)

- 1) مجموعه گراف‌هایی که درجه همه رأس‌های آن‌ها کمتر یا مساوی 3 است یک زبان نامنظم است.
- 2) مجموعه گراف‌هایی که درجه همه رأس‌های آن‌ها کمتر یا مساوی 3 است یک زبان منظم است.
- 3) مجموعه گراف‌های همیلتنی یک زبان تصمیم‌پذیر نیست.
- 4) مجموعه گراف‌های همیلتنی یک زبان منظم است.

9- اگر $\langle M \rangle$ یک کودینگ از ماشین‌های تورینگ باشد، زبان‌های زیر را در نظر بگیرید:

$L_1 = \{ \langle M, w \rangle \mid w \text{ گام 10 پس از } M \text{ می‌پذیرد} \}$

$L_2 = \{ \langle M, \rangle \mid M \text{ بیش از 10 عضو دارد} \}$

$L_3 = \{ \langle M, \rangle \mid M \text{ هر رشته به طول 10 را می‌پذیرد} \}$

(علوم کامپیوتر - 91)

کدام گزینه درست است؟

- 1) زبان L_1 تصمیم‌پذیر (decidable) ولی L_2 و L_3 تصمیم‌ناپذیر (undecidable) هستند.
- 2) زبان‌های L_1 و L_3 تصمیم‌پذیر ولی L_2 تصمیم‌ناپذیر است.
- 3) زبان‌های L_1 ، L_2 و L_3 تصمیم‌پذیر هستند.
- 4) زبان‌های L_1 و L_2 تصمیم‌پذیر ولی L_3 تصمیم‌ناپذیر است.

10- کدام یک از مسائل زیر برای زبان‌ها در $\{0,1\}^*$ تصمیم‌پذیر نیست؟ (علوم کامپیوتر - 91)

- 1) برای یک گرامر مستقل از متن داده شده آیا این گرامر بیش از دو رشته را تولید می‌کند؟
- 2) برای گرامر مستقل از متن داده شده G ، آیا $L(G)$ متناهی است؟
- 3) برای گرامر مستقل از متن داده شده G ، آیا $L(G) \subseteq \{0\}^*$ ؟
- 4) برای یک گرامر مستقل از متن داده شده، آیا این گرامر همه رشته‌های $\{0,1\}^*$ را تولید می‌کند؟

(علوم کامپیوتر - 89)

11- مسأله زیر را در نظر بگیرید:

ورودی: گراف جهت‌دار و متناهی G ، و دو رأس v و u از آن
سوال: آیا یک مسیر جهت‌دار در G با رأس اولیه u و رأس آخر v وجود دارد؟

- (1) این مسأله یک مسأله تصمیم‌پذیر است.
- (2) مسأله پذیرش یک کلمه w در یک PDA را می‌توان به این مسأله تحویل کرد.
- (3) مسأله پذیرش یک کلمه w در یک DPDA می‌توان به این مسأله تحویل کرد.
- (4) مسأله امکان پذیرش کلمه w در یک ماشین تورینگ را می‌توان به این مسأله تحویل کرد.

(علوم کامپیوتر - 88)

12- کدام گزینه صحیح است؟

- (1) اگر L یک زبان منظم باشد، حداکثر تعداد متناهی ماشین تورینگ قطعی با زبان L وجود دارد.
- (2) اگر برای زبان L یک ماشین تورینگ با زبان L موجود باشد، آن‌گاه نامتناهی ماشین تورینگ قطعی دیگر با زبان L وجود دارند.
- (3) برای هر زبان $L \supseteq \{0,1\}^*$ نامتناهی ماشین تورینگ با زبان L وجود دارد.
- (4) برای هر زبان مستقل از متن L ، حداکثر متناهی ماشین تورینگ غیرقطعی (nondeterministic) با زبان L وجود دارد.

(مهندسی کامپیوتر - 83)

13- کدام یک از گزاره‌های زیر معادل‌اند؟

- الف) ابهام در گرامرهای مستقل از متن یک مسأله تصمیم‌ناپذیر (Undecidable) است.
 - ب) حداقل یک مسأله تصمیم‌ناپذیر قابل کاهش (Reducible) به مسأله ابهام در گرامرهای مستقل از متن وجود دارد.
 - ج) مسأله ابهام در گرامرهای مستقل از متن به حداقل یک مسأله تصمیم‌ناپذیر قابل کاهش است.
 - د) هیچ گرامر مستقل از متن وجود ندارد که بتوان ثابت کرد که مبهم است یا خیر؟
- (1) الف و ب (2) الف و ج (3) الف و د (4) الف، ب و د

14- فرض کنید L مجموعه همه ماشین‌های تورینگی باشد که به ازای هر ورودی در حلقه دائم (infinite loop) قرار می‌گیرند،

(علوم کامپیوتر - 83)

آن‌گاه L زبانی :

- (1) منظم است.
- (2) مستقل از متن است و منظم نیست.
- (3) تصمیم‌پذیر است و مستقل از متن نیست.
- (4) تصمیم‌ناپذیر است.

15- G_1 و G_2 دو گرامر مستقل از متن و G_3 یک گرامر منظم و رشته w مفروضند. λ رشته‌ای به طول صفر است. برای کدام سوال

(مهندسی کامپیوتر - 81)

الگوریتم وجود ندارد؟

- (1) آیا $L(G_1) = \emptyset$ ؟
- (2) آیا $\lambda \in L(G_1) \cap L(G_2)$ ؟
- (3) آیا $w \in L(G_1) \cap L(G_3)$ ؟
- (4) آیا $L(G_1) = L(G_2)$ ؟

16- فرض کنید M یک ماشین پوش‌دادن (Pushdown automaton) با n حالت است. این که آیا $L(M) = \Sigma^*$ می‌باشد یا خیر

(مهندسی کامپیوتر - 80)

مسأله‌ای است.

- (1) با پیچیدگی زمانی $O(n^3)$ است.
- (2) با پیچیدگی حافظه $O(n^3)$
- (3) تصمیم‌پذیر (decidable)
- (4) تصمیم‌ناپذیر (undecidable)

17- فرض کنید G_1 و G_2 گرامرهای مستقل از متن (context free) هستند که به ترتیب دارای n_1 و n_2 قاعده تولید می‌باشند.

(مهندسی کامپیوتر - 79)

(1) در حالت کلی الگوریتمی با پیچیدگی زمانی $O(n_1 + n_2)$ وجود دارد که تعیین کند آیا این دو گرامر زبان یکسانی را تولید می‌کنند.

(2) در حالت کلی الگوریتمی با پیچیدگی زمانی $O((n_1 + n_2)^2)$ وجود دارد که تعیین کند آیا این دو گرامر زبان یکسانی را تولید می‌نمایند و الگوریتمی با پیچیدگی زمانی $O(n_1 + n_2)$ وجود ندارد.

(3) در حالت کلی الگوریتمی با پیچیدگی زمانی $O((n_1 + n_2)^3)$ وجود دارد که تعیین کند آیا این دو گرامر زبان یکسانی را تولید می‌نمایند و الگوریتمی با پیچیدگی زمانی $O((n_1 + n_2)^2)$ وجود ندارد.

(4) در حالت کلی الگوریتمی وجود ندارد که تعیین کند آیا این دو گرامر زبان یکسانی را تولید می‌نمایند.

18- جملات زیر را در نظر بگیرید چند مورد از جملات زیر جزء مسائل تصمیم‌ناپذیر هستند؟

(علوم کامپیوتر - 96)

اگر G گرامر بدون محدودیت باشد، آنگاه آیا $L(G) = \emptyset$ هست یا خیر.

اگر G گرامر بدون محدودیت باشد، آنگاه آیا $L(G) = \Sigma^*$ هست یا خیر.

اگر M یک ماشین تورینگ باشد، آنگاه آیا $L(M)$ متناهی است یا خیر.

اگر M یک ماشین تورینگ باشد، آنگاه آیا $L(M)$ منظم است یا خیر.

(1) یک مورد (2) دو مورد (3) سه مورد (4) چهار مورد

19- فرض کنید تابع محاسبه‌پذیر f یک تناظر یک به یک بین زبان A و B است. کدام یک صحیح است؟

(علوم کامپیوتر - 96)

(1) اگر B منظم باشد آنگاه A هم منظم است.

(2) حداقل یکی از زبان‌های A و B باید منظم باشد.

(3) اگر B نامنظم باشد آنگاه A هم نامنظم است.

(4) زبان‌های A و B مستقل از هم می‌توانند منظم یا نامنظم باشند.

20- کدام گزینه در مورد گرامر دلخواه $G = (\Sigma, V, S, P)$ که هر قاعده آن به صورت $\alpha \rightarrow \beta$ است که $|\beta| > 0$ و β شامل حداقل

(علوم کامپیوتر - 96)

یک متغیر است، صحیح است؟

(1) $L(G)$ توسط یک اتوماتون متناهی پذیرفته می‌شود.

(2) $L(G)$ توسط یک LBA پذیرفته می‌شود ولی لزوماً توسط یک ماشین پشته‌ای پذیرفته نمی‌شود.

(3) $L(G)$ توسط یک ماشین تورینگ قطعی پذیرفته می‌شود ولی لزوماً توسط یک LBA پذیرفته نمی‌شود.

(4) $L(G)$ توسط یک ماشین پشته‌ای پذیرفته می‌شود ولی لزوماً توسط یک اتوماتون متناهی پذیرفته نمی‌شود.

21- برای حل یک مسئله P یک الگوریتم داریم که به ازای هر نمونه دلخواه از مساله P جواب آن را به دست می‌آورد. کدام گزینه

(علوم کامپیوتر - 96)

در مورد این الگوریتم صحیح است؟

(1) لزوماً این الگوریتم قابل اجرا روی ماشین تورینگ قطعی نیست.

(2) این الگوریتم را می‌توان بر روی یک اتوماتون خطی محدود (LBA) اجرا کرد.

(3) فقط می‌توان این الگوریتم را روی ماشین تورینگ جهانی (Universal) اجرا کرد.

(4) این الگوریتم را می‌توان بر روی یک ماشین تورینگ قطعی اجرا کرد ولی لزوماً قابل اجرا روی LBA نیست.

22- کدام یک از زبان‌های زیر بازگشتی است؟

(علوم کامپیوتر - 97)

(1) $L = \{ \langle D \rangle \mid D \text{ یک TM با مینییم state است} \}$

(2) $L = \{ \langle D \rangle \mid D \text{ یک DFA با مینییم state است} \}$

(3) $L = \{ \langle D \rangle \mid D \text{ یک NPDA با مینییم state است} \}$

(4) $L = \{ \langle D \rangle \mid D \text{ یک PDA با مینییم state است} \}$

23- همه جملات زیر صحیح‌اند. به جز:

(علوم کامپیوتر - 97)

- (1) به ازای هر زیرمجموعه از یک زبان بازگشتی نمی‌توان یک decidable TM ارائه نمود.
- (2) به ازای هر رشته در یک زبان غیربازگشتی می‌توان یک decidable TM ارائه نمود.
- (3) به ازای هر زیرمجموعه از یک زبان غیربازگشتی نمی‌توان یک decidable TM ارائه نمود.
- (4) می‌توان یک زیرمجموعه نامتناهی از یک زبان غیربازگشتی یافت که decidable TM باشد.

24- کدام گزینه در مورد انکدینگ مسأله دلخواه A صحیح است؟

(دکتری علوم کامپیوتر - 98)

- (۱) طول هر نمونه مسأله از A در همه الفباهای حداقل دو حرفی هم مرتبه است.
- (۲) همه نمونه‌های مسأله A در یک الفبای مشخص طول‌های هم مرتبه دارند.
- (۳) طول انکدینگ‌های مختلف مسأله A در الفباهای مختلف یکسان است.
- (۴) مسأله A در هر الفبای ناتهی قابل بیان است.

25- کدام یک از زبان‌های زیر تصمیم‌پذیر تورینگ نیست؟

(دکتری علوم کامپیوتر - 98)

- (1) مجموعه زبان‌های مستقل از متن
- (2) مجموعه زوج تورینگ‌های (M_1, M_2) که $L(M_1) = L(M_2)$
- (3) مجموعه (G, w) هایی که G گرامر مستقل از متن است و $w \in L(G)$
- (4) مجموعه آتوماتون‌های متناهی قطعی که زبان آن‌ها Σ^* است.

26- اگر G یک گرامر نامحدود (نوع صفر) باشد. آنگاه کدام گزینه در مورد مسئله $L(G) = \emptyset$ صحیح است؟

(دکتری علوم کامپیوتر - 98)

- (1) بازگشتی شمارش‌ناپذیر است.
- (2) بازگشتی شمارش‌پذیر است.
- (3) در مکمل خانواده زبان‌های بازگشتی قرار دارد.
- (4) در مکمل خانواده زبان‌های بازگشتی شمارش‌پذیر قرار دارد.

27- کدام گزینه در مورد ماشین‌های تورینگ نادرست است؟

(دکتری علوم کامپیوتر - 98)

- (۱) تعداد ماشین‌های تورینگ متفاوت شمارش‌پذیر است.
- (2) هر ماشین تورینگ غیرقطعی دارای یک ماشین تورینگ قطعی معادل است.
- (3) توان پردازش ماشین تورینگ چند نواره با ماشین تورینگ تک نواره برابر است.
- (4) برای هر زبان دلخواه L یک ماشین تورینگ M وجود دارد که $L(M) = L$.

28- همه عبارات زیر صحیح‌اند. به جز:

(علوم کامپیوتر - 98)

- (1) اگر $L_1, L_2, \dots$ Turing-recognizable است پس $\bigcup_{i=1}^{\infty} L_i$ Turing-recognizable است.
- (۲) اگر L Turing-recognizable است پس یک تابع محاسبه‌پذیر جزئی از Σ^* به Σ^* وجود دارد که بردش L است.
- (3) اگر L Turing-recognizable است پس یک تابع محاسبه‌پذیر جزئی از Σ^* به Σ^* وجود دارد که دامنه‌اش L است.
- (4) اگر L Turing-recognizable است ولی Turing-decidable نیست پس تعداد نامتناهی ورودی وجود دارد که به ازای هر ماشین تورینگ طراحی شده برای L در loop بی‌نهایت قرار می‌گیرد.

- 29- فرض کنید $L \subseteq \{a\}^*$ باشد، کدام جمله زیر صحیح است؟
 (1) L منظم است.
 (2) L مستقل از متن است.
 (3) اگر L مستقل از متن باشد، پس L منظم است.
 (4) اگر L Turing – decidable باشد، پس مستقل از متن است.

- 30- اگر ماشین تورینگ تک نواره M قادر به نوشتن در بخشی از نوار که شامل ورودی است نباشد چه زبانی را می‌پذیرد؟
 (1) منظم
 (2) مستقل از متن
 (3) حساس به متن
 (4) بازگشتی

- 31- L و L' دو زبان هستند. چند تا از گزاره‌های زیر درست است؟
 (1) اگر L تصمیم‌پذیر باشد و $L \leq L'$ آن‌گاه L' تصمیم‌پذیر است.
 (2) اگر $L \leq L'$ و $L' \leq L$ آن‌گاه $L = L'$
 (3) اگر Σ^* و $L \neq \emptyset$ آن‌گاه $L \leq L^c$ (L^c زبان مکمل L است).
 توضیح نماد: برای دو زبان A و B می‌نویسیم $A \leq B$ هرگاه A تقلیل‌پذیر تورینگی به B باشد.
 (1) 0 (2) 1 (3) 2 (4) 3

(علوم کامپیوتر - 99)

(علوم کامپیوتر - 98)

(دکتری علوم کامپیوتر - 98)

پاسخ‌ها**تست 1 الی 31****(همه سوالات فصل 10)**

1- گزینه (3) صحیح است.

زبان‌های بازگشتی نسبت به مکمل بسته‌اند اما زبان‌های بازگشتی شمارش‌پذیر نسبت به مکمل بسته نیستند. مجموعه همه زبان‌ها ناشماراست در حالیکه تعداد ماشین‌های تورینگ غیرهم‌ارز شماراست پس همه زبان‌ها دارای تورینگ پذیرنده نیستند. مجموعه زبان‌هایی که ماشین تورینگ پذیرنده دارند را رده می‌نامیم که معادل است با مجموعه زبان‌های دارای گرامر (بدون محدودیت) و یک خانواده شمارا از زبان‌هاست. هر کدام از زبان‌های این خانواده، دارای تورینگ پذیرنده هستند و هر ماشین تورینگ برای رشته‌هایی که عضو باشند، متوقف میشوند پس هر زبان دارای ماشین تورینگ، تشخیص‌پذیر (بازگشتی شمارش‌پذیر) است. اما همه این زبان‌ها تصمیم‌پذیر نیستند یعنی دارای الگوریتم عضویت نیستند.

2- گزینه (1) صحیح است.

اگر بدانیم مساله‌ای تصمیم‌ناپذیر است و بدانیم به مساله A کاهش می‌یابد، آنگاه نتیجه می‌گیریم مساله A نیز تصمیم‌ناپذیر است. مساله مبهم بودن یا نبودن گرامر مستقل از متن تصمیم‌ناپذیر است زیرا مساله تصمیم‌ناپذیر PCP را می‌توان به مساله ابهام کاهش داد. مسائل مطرح شده در سایر گزینه‌ها تصمیم‌پذیرند.

3- گزینه (3) صحیح است.

درستی گزاره P واضح است زیرا مساله متناهی یا نامتناهی بودن زبان مستقل از متن، تصمیم‌پذیر است. الگوریتم مورد نظر به طور خلاصه چنین است: هر گرامر مستقل از متن G به شکل سیستماتیک (دارای الگوریتم) قابل تبدیل به گرامر معادل غیرانقباضی مانند $\hat{G}$ است. البته کافی است متغیرها و قواعد نامفید حذف شود تا گرامر $\hat{G}$ به دست آید. با توجه به قواعد $\hat{G}$ گراف وابستگی متغیرها را می‌سازیم. هر متغیر از $\hat{G}$ ، یک گره از گراف است. و اگر قاعده‌ای به فرم $A \rightarrow \alpha B \gamma$ داشتیم یک یال جهت‌دار از گره A به گره B در نظر می‌گیریم. زبان $L(G)$ نامتناهی است اگر و تنها اگر گراف وابستگی شامل دور باشد. حالا چون مساله وجود یا عدم وجود دور در گراف، تصمیم‌پذیر است در نتیجه مساله P تصمیم‌پذیر است. این مساله در قالب زبان نیز بیان می‌شود. گرامرهای مستقل از متنی که زبان نامتناهی تولید کنند عضو این زبان هستند:

$$\text{Infinite}_{CFG} = \{ \langle G \rangle : G \text{ is a CFG and } |L(G)| = \infty \}$$

اما Q نادرست است. مساله تساوی زبان‌هایی که دو گرامر مستقل از متن تولید می‌کنند (معادل بودن گرامرها) یک مساله تصمیم‌ناپذیر است. برای اثبات این مطلب یک مساله تصمیم‌ناپذیر شناخته شده مانند مساله تمامیت (این که $L(G) = \Sigma^*$ است یا خیر؟) را برای گرامر مستقل از متن G در نظر می‌گیریم. مساله تمامیت قابل کاهش به مساله معادل بودن گرامرهای مستقل از متن است. پس مساله معادل بودن گرامرها هم تصمیم‌ناپذیر است.

مساله Q معادل زبانی زیر را دارد:

$$\text{EQ}_{CFG} = \{ \langle G_1, G_2 \rangle : G_1 \text{ and } G_2 \text{ are CFG and } L(G_1) = L(G_2) \}$$

مساله تمامیت معادل زبانی زیر را دارد:

$$\text{ALL}_{CFG} = \{ \langle G \rangle : G \text{ is a CFG and } L(G) = \Sigma^* \}$$

با کاهش زبان تصمیم‌ناپذیر ATM به زبان ALLCFG ثابت می‌شود ALLCFG تصمیم‌ناپذیر است. سپس با کاهش زبان ALLCFG به زبان EQCFG، ثابت می‌شود EQCFG تصمیم‌ناپذیر است.

4- گزینه (1) صحیح است.

ماشین مطرح شده ماشین تورینگ LBA است. این ماشین پذیرنده زبان حساس به متن است. هر زبان حساس به متن بازگشتی و تصمیم‌پذیر است. مسأله عضویت یا عدم عضویت w در این زبان یک مسأله تصمیم‌پذیر است. یعنی الگوریتمی وجود دارد که عضویت یا عدم عضویت w در این زبان را مشخص می‌کند پس گزینه ۲ نادرست است. درست است که ماشین LBA برای هر رشته ورودی حتما متوقف می‌شود اما از آنجا که حافظه مصرفی آن برای رشته به طول n از مرتبه $O(n)$ است تعداد کل پیکربندی‌های متمایز حداکثر $n!$ است پس تعداد گام‌ها و در نتیجه مرتبه زمانی ممکن است نمایی برحسب n باشد. پس گزینه‌های ۳ و ۴ رد شده و گزینه ۱ صحیح است. یادآوری: اگر تعداد نمادهای ماشین m باشد و $|w|=n$ و ماشین تورینگ برای هر رشته فقط از $S(n)$ خانه حافظه استفاده کند آنگاه تعداد کل پیکربندی‌ها حداکثر از مرتبه $O(nS(n)m^{S(n)})$ است.

5- گزینه (3) صحیح است.

در حالت کلی برای هر مدل محاسباتی تورینگ N این که آیا ماشین تورینگ N رشته‌ای به طول فرد را می‌پذیرد یا نه؟ مسأله‌ای تصمیم‌ناپذیر است؛ در این مورد تورینگ قطعی و غیرقطعی تفاوتی با هم ندارند. پس گزینه‌های ۱ و ۲ نادرست است. برای ادامه بررسی دقت کنید که مجموعه همه رشته‌های به طول فرد، یک زبان منظم است. زبانی که یک ماشین متناهی N می‌پذیرد نیز زبانی منظم است. پس مجموعه رشته‌های به طول فردی که توسط ماشین متناهی N پذیرفته شوند، اشتراک دو زبان منظم است پس خودش یک زبان منظم است. بنابراین عضویت یا عدم عضویت یک رشته در آن تصمیم‌پذیر است. همچنین اگر N ماشین پشته‌ای باشد مسأله تعیین این که آیا یک ماشین پشته‌ای رشته‌ای به طول فرد را می‌پذیرد یا نه؟ تصمیم‌پذیر است. زیرا اشتراک یک زبان مستقل از متن و یک زبان منظم، زبانی مستقل از متن است. زبان‌های مستقل از متن، تصمیم‌پذیرند. در گزینه ۴ گفته شده که فقط وقتی N مدل ماشین متناهی باشد L_N تصمیم‌پذیر است؛ پس این گزینه نادرست است و گزینه ۳ صحیح است.

6- گزینه (1) صحیح است.

G گرامری مستقل از متن است. بنابراین زبان‌های $L(G)$ ، $L(G)^R$ و $L(G)^*$ مستقل از متن هستند. برای هر زبان مستقل از متن، مساله‌های عضویت، تهی یا ناتهی بودن، متناهی یا نامتناهی بودن، برای آنها تصمیم‌پذیر است. اما در مورد گزینه یک: $\overline{L(G)}$ تهی است اگر و تنها اگر $L(G)$ برابر Σ^* باشد. مساله $L(G) = \Sigma^*$ برای گرامر مستقل از متن، تصمیم‌ناپذیر است. پس گزینه ۱ نادرست است.

7- گزینه (2) صحیح است.

برای زبان مستقل از متن مسأله عضویت یا عدم عضویت یک رشته مسأله‌ای تصمیم‌پذیر است؛ برای گرامر به فرم نرمال چامسکی (چه مبهم باشد چه غیرمبهم) این مساله در زمان $O(n^3)$ حل می‌شود. پس گزینه‌های ۱ و ۳ نادرستند. در گرامر نرمال چامسکی تعداد مراحل اشتقاق برای تولید رشته $x \in L(G)$ همواره برابر $|x|-1$ است. حتی اگر چندین روش برای تولید x وجود داشته باشد در همه آنها تعداد مراحل $|x|-1$ است. پس گزینه ۲ صحیح است. اما این مطلب برای همه گرامرهای مستقل از متن درست نیست. مثلاً در این گرامر مستقل از متن، برای تولید رشته $x = ab$ بیش از ۳ مرحله اشتقاق لازم است:

$$G : S \rightarrow A, A \rightarrow BC, B \rightarrow D, C \rightarrow EF, D \rightarrow a, E \rightarrow b, F \rightarrow \lambda$$

پس گزینه ۴ نادرست است.

8- گزینه (2) صحیح است.

توضیح لازم: کلید اولیه این سوال گزینه 2 است اگر فرض کنیم منظور طراح سوال در گزینه های یک و دو عدد طبیعی ثابت n باشد کلید سوال درست است در غیراینصورت گزینه 1 درست است. اگر n ثابت باشد مجموعه گرافهای با n راس که درجات رأس‌های آن‌ها کمتر یا مساوی 3 است مجموعه‌ای متناهی خواهد بود در نتیجه منظم است.

توجه: اگر n دلخواه باشد مجموعه گرافهای با n راس که درجات رأس‌های آن‌ها کمتر یا مساوی 3 است نامتناهی و نامنظم است. ماشین متناهی نمی‌تواند مساوی بودن طول رشته های نماینده هر گره را بررسی کند. همچنین از صورت سوال مشخص است که منظور طراح سوال گرافهای غیرجهتدار است زیرا از اصطلاح (درجه رأس) استفاده کرده است. در گراف غیرجهت دار اگر $X_j^i = 1$ باشد باید X_i^j نیز برابر با یک باشد اما ماشین متناهی نمی‌تواند این تطبیق را انجام دهد پس در حالت کلی این مجموعه نامنظم خواهد بود.

9- گزینه (1) صحیح است.

زبان L_1 تصمیم‌پذیر است زیرا برای هر رشته ورودی پس از 10 گام، عضویت یا عدم عضویت مشخص خواهد شد و در هر دو حالت توقف خواهیم داشت. اما برای زبان‌های L_2 و L_3 تشخیص‌پذیرند اما تصمیم‌پذیر نیستند. یک توضیح ساده در مورد L_2 : تصور کنید که همه رشته های Σ^* را در یک صف قرار داده ایم تا پذیرش آنها بررسی شود اگر 11 رشته مورد پذیرش قرار بگیرند ما به پاسخ مثبت می‌رسیم اما اگر تمام رشته هایی که تاکنون آزموده ایم پذیرفته نشده باشند ناچاریم تا بینهایت به این آزمون ادامه دهیم و هیچ نقطه توقفی وجود ندارد. در مورد L_3 تصور کنید که رشته های به طول 10 را در یک صف قرار داده ایم تا پذیرش آنها بررسی شود. اگر همه آنها مورد پذیرش قرار بگیرند ما به پاسخ مثبت می‌رسیم اما اگر یکی از آنها عضو زبان ماشین نباشد ممکن است در حلقه گرفتار شویم و بررسی آن هرگز به پایان نرسد.

10- گزینه (4) صحیح است.

گزینه های 1 و 2 و 3 تصمیم‌پذیر هستند و الگوریتم نظیر هرکدام را می‌شناسیم. اما برای گرامر مستقل از متن G این مسأله آیا $L(G)$ برابر Σ^* است یا خیر؟ یک مسأله تصمیم‌ناپذیر است.

11- گزینه (1) صحیح است.

هر مسأله تصمیم که برایش الگوریتمی وجود داشته باشد (چه پاسخ مثبت باشد چه منفی، این الگوریتم متوقف شده و پاسخ را بیابد) مسأله تصمیم‌پذیر است. در درس طراحی الگوریتم‌ها برای الگوریتم هایی مانند جستجوی سطحی داریم که با شروع از راس u آغاز وجود یا عدم وجود مسیر از u به v را تشخیص می‌دهند. پس این مسأله تصمیم‌پذیر است.

12- گزینه (2) صحیح است.

هر زبانی که دارای ماشین تورینگ پذیرنده باشد، یک زبان دارای گرامر است، تشخیص‌پذیر است، بازگشتی شمارش‌پذیر است و در رده ℓ_0 قرار دارد. هر کدام از این زبان‌ها دارای بی‌نهایت ماشین تورینگ قطعی و دارای بی‌نهایت ماشین تورینگ غیرقطعی هستند. در واقع هر ماشین تورینگ دارای بی‌نهایت ماشین تورینگ معادل است.

13- گزینه (1) صحیح است.

طبق قضیه: اگر یک مسأله تصمیم‌ناپذیر قابل کاهش به مسأله P باشد، مسأله P نیز تصمیم‌ناپذیر است. از طرفی اگر مسأله P تصمیم‌ناپذیر باشد خودش به خودش قابل کاهش است یعنی یک مسأله تصمیم‌ناپذیر قابل کاهش به P وجود دارد. به عبارتی می‌توانیم قضیه را به صورت اگر و تنها اگر بیان کنیم: مسأله P تصمیم‌ناپذیر است اگر و تنها اگر یک مسأله تصمیم‌ناپذیر به آن قابل کاهش باشد. مسأله تشخیص مبهم بودن یا مبهم نبودن گرامر مستقل از متن، یک مسأله تصمیم‌ناپذیر است.

بنابراین گزاره های (الف) و (ب) نه تنها درست هستند بلکه با هم معادل هستند. (برای ما معادل بودن آنها مهم است) در مورد گزاره (د) دقت کنید که این ادعا نه درست است و نه معادل با الف است. ممکن است در حالات خاص برای برخی از گرامرهای مستقل از متن مسأله ابهام تصمیم‌پذیر شود. اما در حالت کلی برای آن الگوریتمی وجود ندارد. پس گزینه ۱ صحیح است.

14- گزینه (4) صحیح است.

گزینه 4 نتیجه مستقیم مساله halt است.

15- گزینه (4) صحیح است.

برای گرامرهای مستقل از متن، مساله معادل بودن گرامرها یعنی همان مساله تساوی زبان‌ها، تصمیم‌ناپذیر است.

16- گزینه (4) صحیح است.

برای گرامر مستقل از متن G مساله تمامیت (کامل بودن) یعنی مساله $L(G) = \Sigma^*$ تصمیم‌ناپذیر است. برای ماشین پشته‌ای M مساله $L(M) = \Sigma^*$ تصمیم‌ناپذیر است. برای زبان مستقل از متن L مساله $L = \Sigma^*$ تصمیم‌ناپذیر است.

17- گزینه (4) صحیح است.

برای گرامرهای مستقل از متن مساله معادل بودن یعنی تساوی زبان‌ها تصمیم‌ناپذیر است.

18- گزینه (4) صحیح است.

توان محاسباتی گرامرهای بدون محدودیت و ماشین‌های تورینگ، خانواده زبان‌های بازگشتی شمارش‌پذیر است. در این خانواده، مساله‌های: تهی بودن، متناهی بودن، کامل بودن (برابری با Σ^*) و منظم بودن یک زبان، تصمیم‌پذیر نیستند.

19- گزینه (4) صحیح است.

زبان‌های $A = \Sigma^*$ و $B = \{ww \mid w \in \Sigma^*\}$ را در نظر بگیرید. تابع محاسبه‌پذیر $f(w) = ww$ یک تناظر یک به یک از A به B ایجاد می‌کند. A منظم است ولی B نه تنها منظم نیست بلکه مستقل از متن هم نیست. پس وجود یک تابع محاسبه‌پذیر که هر عضو A را به یک عضو B نظیر می‌کند به معنای آن نیست که هر دو زبان باید به یک خانواده تعلق داشته باشند.

20- گزینه (1) صحیح است.

اگر سمت راست تمام قواعد تولید $\alpha \rightarrow \beta$ متغیر وجود داشته باشد، پس هیچ‌گاه به ترمینالها نمی‌رسیم و هیچ رشته‌ای تولید نمی‌شود. در واقع همه متغیرها زائد هستند و $L(G) = \emptyset$ است. زبان تهی، متناهی است پس منظم است و توسط ماشین متناهی پذیرفته می‌شود.

21- گزینه (4) صحیح است.

برای حل مسأله P یک الگوریتم داریم که برای همه ورودی‌ها متوقف می‌شود. پس P تصمیم‌پذیر است. این الگوریتم قابل اجرا توسط ماشین تورینگ (قطعی و غیرقطعی) تصمیم‌گیرنده است. اما لزوماً ماشین تورینگ LBA ندارد. در واقع این مساله معادل است با زبانی که بازگشتی است. زبان‌های بازگشتی حتماً تشخیص‌پذیر هستند اما لزوماً حساس به متن نیستند.

22- گزینه (2) صحیح است.

زبان L شامل کدینگ ماشین‌های تورینگ، است که مدل آنها D است. گزینه ۱ بازگشتی نیست. ممکن است D کد یک تورینگ تصمیم‌ناپذیر باشد پس ممکن است در حلقه نامتناهی گیر کند، حتی اگر تعداد حالات آن کمینه باشد. گزینه ۲ بازگشتی است. اگر D یک DFA باشد، هیچ‌گاه در حلقه نامتناهی قرار نمی‌گیرد. گزینه‌های ۳ و ۴ هم بازگشتی نیستند. اگر D یک ماشین پشته‌ای باشد ممکن است با انتقال‌های λ در حلقه نامتناهی قرار بگیرد و کمینه بودن تعداد حالات یا قطعی بودن ماشین از این وضعیت جلوگیری نمی‌کند.

23- گزینه (3) صحیح است.

زبان‌های غیربازگشتی، نامتناهی هستند. آنها دارای زیرمجموعه‌های متناهی هستند. متناهی‌ها منظم هستند پس بازگشتی (تورینگ تصمیم‌پذیر) هستند. پس هر زبان غیربازگشتی حتما دارای زیرمجموعه‌های بازگشتی است. پس گزینه ۳ نادرست است. گزینه ۱ درست است: زبان Σ^* منظم در نتیجه بازگشتی است اما زیرمجموعه غیربازگشتی زیادی دارد. گزینه ۲ درست است. زبان هر رشته به تنهایی یک مجموعه متناهی و منظم است. پس برای آن تورینگ تصمیم‌پذیر وجود دارد. گزینه ۴ درست است و نمونه‌های زیادی دارد.

24- گزینه (1) صحیح است.

طول هر نمونه مسأله از A با ورودی w ، در تمام الفباهای m عضوی که $m \geq 2$ ، از مرتبه $\log_m |w|$ است زیرا هر ورودی لازم است با m مقدار متفاوت کدگذاری شود. لگاریتم‌ها برای مقادیر مجانبی (مقادیر بزرگ m) فارغ از مبنای لگاریتم، هم مرتبه اند پس همه از مرتبه $O(\log |w|)$ هستند. گزینه ۲ نادرست است. در یک الفبای تک حرفی، نمونه‌های مسأله A دارای طول‌های مختلفی هستند مثلاً نمونه‌های به طول n و n^2 از یک مسئله، هم مرتبه نیستند. گزینه ۳ نادرست است. طول انکدینگ‌های یک مسأله در الفباهای مختلف متفاوت خواهد بود. گزینه ۴ نادرست است. مسأله A فقط در صورتی که تشخیص‌پذیر باشد، در هر الفبای ناتهی قابل بیان است.

25- گزینه (2) صحیح است.

حتی برای دو ماشین پشته‌ای نیز مسأله $L(M_1) = L(M_2)$ تصمیم‌پذیر نیست. بنابراین در حالت کلی تر برای جفت تورینگ (M_1, M_2) مسأله $L(M_1) = L(M_2)$ تصمیم‌پذیر نیست. سایر گزینه‌ها تصمیم‌پذیر هستند.

26- گزینه (4) صحیح است.

(گزینه‌ها دقت کافی ندارند اما گزینه 4 بهترین انتخاب است).

اگر G گرامری نامحدود باشد (یا M یک ماشین تورینگ باشد) مسأله $L(G) = \emptyset$ (مسأله $L(M) = \emptyset$) تصمیم‌ناپذیر است. در واقع هیچکدام از گزینه‌ها کاملاً دقیق نیستند اما فقط گزینه 4 این تضمین را می‌دهد که این مسأله تصمیم‌ناپذیر نیز باشد.

27- گزینه (4) صحیح است.

زبانی که بازگشتی شمارش‌پذیر نباشد ماشین تورینگ پذیرنده‌نیز نخواهد داشت. سایر گزینه‌ها درستند: تعداد ماشین‌های تورینگ شمارای نامتناهی است. هر ماشین تورینگ غیرقطعی دارای ماشین تورینگ قطعی معادل است. توان پردازش ماشین تورینگ چندنواره با ماشین تورینگ تک‌نواره برابر است.

28- گزینه (1) صحیح است.

هیچکدام از رده‌های معروف زبان‌ها نسبت به اجتماع نامتناهی بسته نیستند چون هر زبان دلخواه نامتناهی را می‌توان به صورت اجتماعی از تک‌عضوی‌ها نوشت. تک‌عضوی‌ها منظم و عضو RE هستند اما اجتماع آنها می‌تواند هر زبان دلخواهی باشد. گزینه‌های ۲ و ۳ درستند. اگر L ، تورینگ - تشخیص‌پذیر باشد، یک ماشین تورینگ پذیرنده دارد و یک ماشین می‌تواند روال شمارش را برای آن انجام دهد. گزینه ۴ درست است. اگر L ، تورینگ - تشخیص‌پذیر باشد و تورینگ - تصمیم‌پذیر نباشد پس تعداد نامتناهی رشته ورودی وجود دارد که ماشین تورینگ پذیرنده L را در loop بی‌نهایت قرار می‌دهد.

29- گزینه (3) صحیح است.

هر زبان مستقل از متن و تک الفبایی حتماً منظم است. البته زبان‌های تک الفبایی می‌توانند عضو هر کدام از رده‌های شناخته شده زبان‌ها باشد. یک زبان تک الفبایی می‌تواند از متناهی، منظم، ... تا تشخیص‌ناپذیر باشد.

30- گزینه (1) صحیح است.

اگر ماشین تورینگ تک نواره مجاز به نوشتن در بخشی از نوار که شامل ورودی است نباشد امکان علامت‌گذاری، مقایسه و شمارش از دست خواهد رفت و توان محاسبه ماشین به اندازه ماشین متناهی خواهد شد. پس زبانی که پذیرفته می‌شود، منظم است.

31- گزینه (1) صحیح است.

جمله اول نادرست است. فرض کنیم $L \leq L'$. حالا اگر L' تصمیم‌پذیر باشد آن‌گاه L تصمیم‌پذیر است، (پس اگر L تصمیم‌ناپذیر باشد آن‌گاه L' تصمیم‌ناپذیر است.) اما نمی‌توان از تصمیم‌پذیری L به تصمیم‌پذیری L' رسید. جمله دوم نادرست است. اگر $L \leq L'$ و $L' \leq L$ آن‌گاه L و L' لزوماً برابر نیستند بلکه الگوریتمی برای نگاشت تقلیل هر کدام به دیگری وجود دارد.

جمله سوم در حالت کلی نادرست است اما در شرایط خاص درست است. اگر L منظم یا مستقل از متن قطعی، حساس به متن یا بازگشتی باشد، این جمله درست است. اما در حالت کلی برای زبان‌های بازگشتی شمارش‌پذیر این جمله صحیح نیست.

پروژه و سربلند باشید.

پایان جلسه بیست و چهارم نکته و تست